诚信考试，公平竞争。 以下三种行为是严重作弊行为，学校将从严处理：
1.替他人考试或由他人替考；　2.通讯工具作弊；　3.组织作弊。

浙江工业大学《高等数学 I》期中试卷
2022-2023 学年第一学期

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1． 下列极限存在的是（　A　）

(A) $\lim\limits_{x\to\infty} x\arctan\dfrac{1}{x}$　(B) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sin x^2$　(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x}$　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^3}$

2． 设 $f(x)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\cdot\arctan\dfrac{1}{x}$，$x=0$ 是 $f(x)$ 的（　B　）

(A) 跳跃间断点　　(B) 可去间断点

(C) 无穷间断点　　(D) 连续点

3． 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}\ (0<x<+\infty)$，则以下命题正确的是 （　D　）

(A) 当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f(x)$ 有界　　(B) $f(x)$ 为当 $x\to+\infty$ 时的无穷大

(C) $f(x)$ 为 $x\to 0^+$ 时的无穷大　　(D) $f(x)$ 为当 $x\to+\infty$ 时的无穷小

4． 当 $x\to+\infty$ 时，$\ln\dfrac{x+1}{x}$ 是 $\operatorname{arccot} x$ 的（　C　）

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶无穷小，但不是等价无穷小

5．设 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin 2h}{f(2)-f(2-h)}=2$，则 $f'(2)$ 等于（　B　）

(A) -1　(B) 1　(C) 2　(D) 4

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1． 设函数 $f(x)=\begin{cases}5e^x-\cos x, & x\le 0\\ \dfrac{\sin 2x}{\tan ax}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ $\underline{\dfrac{1}{2}}$ 。

2． 已知 $a_n=\dfrac{2^n n!}{n^n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=$ $\underline{\dfrac{2}{e}}$ 。

3．设 $y=e^{\cos x^2}$，则 $dy=$ $\underline{-2x\sin x^2 e^{\cos x^2}dx}$ 。

4．设 $y=\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$，则 $y'=$ $\underline{\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]}$。

5．设 $\cos x^2$ 的麦克劳林展开式为：$a_0+a_1x^2+a_2x^4+\cdots+a_nx^{2n}+R_{2n}(x)$，

则 $a_2=$ $\underline{-\frac{1}{2}}$ 。

三、解答下列各题（本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

1．求：$\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x}$

解：原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0}\cot x\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x)-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\tan(\frac{\pi}{4}-x)-1)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\frac{\pi}{4}-x)-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}-\sec^2(\frac{\pi}{4}-x)}$$

$$=e^{-2}$$

或利用重要极限做。

2．求：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

或用洛必达法则做，或用泰勒展开式做

3. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}-\cos(xy)=0$ 确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解：方程两边关于 x 求导可得：

$$e^{x+y}(1+y')+\sin(xy)(y+xy')=0,$$

所以：$y'=-\frac{e^{x+y}+y\sin(xy)}{e^{x+y}+x\sin(xy)}$,

所以：$y'|_{x=0}=-1$

四、解答下列各题（本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

1. 设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求：$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$，　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}$

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & ，x>0 \\ \dfrac{1}{2} & ，x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

解：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x}{2}}{x}=\dfrac{1}{2}$，

所以：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}=f(0)$，所以：$f(x)$在0点连续。

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{h}=0,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}-\frac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2(\sqrt{1+h}-1)-h}{2h^2}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1}{4h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1+h}}{4h}=-\frac{1}{8}$$

所以：$f(x)$在0点不可导。

3. 设 $f(x)$ 具有二阶导数，且在 $x=0$ 的某去心邻域内满足 $f(x)\neq 0$，已知 $f''(0)=4$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}x=0$，所以：$f(0)=0$，

所以：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\frac{f(x)}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}}$$

$$=e^{\frac{f''(0)}{2}}=e^2$$

五、（本题 6 分）

设a,b为实数，证明方程 $3ax^2+2bx=a+b$ 至少有一个小于1的正根。

证明：令$F(x)=ax^3+bx^2-(a+b)x$，

则$F(x)$在$[0,1]$上可导，$F(0)=F(1)=0$，

由罗尔定理可得：至少存在一点$\xi\in(0,1)$使得$F'(\xi)=0$，

即原方程至少有一个小于1的正根。

或考虑在[0, 2/3] 区间上利用介值定理。

六、（本题 6 分）

设$f'(x)$在$[a,b]$上连续，$f''(x)$在(a,b)内存在，若$f(a)=f(b)=0$，且存在$c\in(a,b)$满足$f(c)>0$，证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)<0$.

证明：因为$f(a)=f(b)=0$，且存在$c\in(a,b)$满足$f(c)>0$

由拉格朗日中值定理可得：存在$\xi_1\in(a,c)$使得$f'(\xi_1)>0$，

存在$\xi_2\in(c,b)$使得$f'(\xi_2)<0$，

再一次使用拉格朗日中值定理可得：

至少存在一点$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$使得$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)$

因而$f''(\xi)<0$，命题得证。

或用反证法；或在最大值点处利用泰勒展开式来做。